شهادة أستاذ التعليم الثانوي في الرياضيات

السنة الرابعة : رياضيات بكالوريا+5
الوحدة: الجبرIV
الرمز: ر411
الحجم الزمني الأسبوعي: دروس : 1 سا 30 د
أعمال موجهة: 1 سا و 30 د
النظام: سنوي
المعامل: 2

مقدمة:
إنّ برنامج الجبر للسنة الرابعة يتناول بالدراسة الحقول التبديلية وتوسيعاتها التي هي فضاءات شعاعية منها ما هي ذات أبعاد منتهيه وأخرى ذات أبعاد غير منتهية، ولكن تدرس من ناحية بنيتها كحقول، كما يتطرّق هذا البرنامج لبنية جبرية جديدة وهي المقياس التي هي تعميم لبنية الفضاء الشعاعي مع بعض الاختلافات الناتجة من الاختلاف بين بنية الحلقة والحقل.

---

1. الحلقات، الحقول، التوسيعات

1.1. حلقة وحقل الكسور

تعريف المجموعة الضربية في حلقة مع أمثلة - تعريف علاقة تكافؤ R في المجموعة $A\times S$ حيث A حلقة واحدية تبديلية و S مجموعة ضربية في A - تزويد مجموعة حاصل القسمة $\frac{\mathsf{A\times S}}{\mathsf{R}}$ بقانونين للتركيب الداخلي الجمع $+$ والضرب $\times$ والتأكّد من أنّ $\left(\frac{\mathsf{A\times S}}{\mathsf{R}},+,\times\right)$ حلقة واحدية وتبديلية نكتب عنصرها $\overline{(a,s)}$ على الشكل $\frac{a}{s}$ ونسميها حلقة كسور الحلقة المنشأة بواسطة المجموعة الضربية S ونرمز لها بـ $S^{-1}A$ - البرهان على أنّ $S^{-1}A$ حلقة تامة إذا وفقط إذا A حلقة تامة - اعتبار التماثل $A\xrightarrow{j_S}S^{-1}A : j_S(a)=\overline{(a,1)}=\frac{a}{1}$

والبرهان على:

أ- مهما تكن B حلقة واحدية وتبديلية و $\varphi\in Hom(A,B)$: $\varphi(S)\subseteq B^*$ يوجد تماثل حلقات وحيد $h\in Hom\left(S^{-1}A,B\right)$ بحيث $\varphi=h\circ j_S$.

ب- j_S متباين إذا وفقط إذا S لا تحتوي على قواسم الصفر، عندئذ نعتبر A حلقة جزئية من $S^{-1}A$.

نعتبر A حلقة تامة ونتأكّد أنّ $S=A-\{0\}$ مجموعة ضربية وأنّ $S^{-1}A$ حقل تبديلي نسميه حقل كسور الحلقة A ، أمثلة: حقل كسور الحلقة $\mathbb{Z}$ هو $\mathbb{Q}$ وحقل كسور الحلقة $K[X]$ هو $K(X)$.

2.1. مميزة الحلقة والحقل :

التذكير بتعريف الحقل والحقل الجزئي - تعريف مميّزة الحلقة ومميزة الحقل [نكتب مميّزة حقل K ، $caracK$ وكذلك مميزة حلقة]. البرهان على:

أ- مميّزة حلقة تامة هي 0 أو عدد أولي

ب- كل حقل مميزته 0 يحتوي حقلا جزئيا يشاكل الحقل $\mathbb{Q}$ ومنه كلّ حقل مميزته 0 هو حقل غير منته

جـ- إذا كان K حقلا جزئيا من حقل L فإنّ $caracK=caracL$

د- كل حقل مميزته p حيث p عدد أوّلي يحتوي حقلا جزئيا يشاكل الحقل $\mathbb{F}_p=\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$

هـ- كل حقل منته مميّزته عدد أولي p وعدد عناصره يساوي p^m : $m\geq 1$.

تقديم أمثلة عن حقول غير منتهية ومميّزتها عدد أوّلي.

نصطلح على أن " K حقل أعداد" نعني بها $\mathbb{Q}\subseteq K\subseteq\mathbb{C}$.

3.1. عدم قابلية الاختزال لكثيرات الحدود في $A[X]$ حيث A حلقة تامة أو عاملي

البرهان على أنّ حلقة كثيرات الحدود $A[X]$ حلقة عاملية إذا وفقط إذا كانت A حلقة عاملية - التذكير بعدم قابلية الاختزال لكثيرات الحدود في الحلقة $A[X]$ - تقديم معيار، مع البرهان، لعدم قابلية الاختزال لكثيرات الحدود في الحلقة $A[X]$ حيث A حلقة تامة - البرهان على معيار EISENSTEIN لعدم قابلية الاختزال في $A[X]$ حيث A حلقة عاملي - البرهان على أنّه في الحلقة $A[X]$ حيث A حلقة عاملية لدينا:
$f(aX+b)\,:\, a,b \in A \;\wedge\; a \neq 0$ غير قابل للاختزال إذا وفقط إذا $f(X)$ غير قابل للاختزال.

4.1. تفكيك كثيرات الحدود في الحلقات $K[X]$ حيث K حقل تبديلي

التذكير بجذر كثير حدود ورتبة تضاعفه - كثير الحدود الفصول في حقل مميّزته صفر وفي حقل مميّزته عدد أوّلي - البرهان على أنّه: مهما يكن K حقلا تبديليا ومهما يكن
$f(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n \in K[X]\,:\, d^\circ(f(X)) \geq 1$ فإنّ $f(X)$ يقبل على الأكثر n جذر في K -
تعريف الحقل المغلق جبريا - الإشارة إلى أنّ الحقل المنتهي لا يمكن أن يكون مغلقا جبريا مع تبرير ذلك - برهان النظرية التالية: مهما يكن K حقلا تبديليا، مهما يك
$f(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n \in K[X]\,:\, d^\circ(f(X)) \geq 1$ ، يوجد حقل تبديلي E يحتوي K
بحيث $f(X)$ يفكك كليا في $E[X]$ أي يكتب على الشكل $f(X)=a_n \cdot \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ حيث
$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ هي جذور $f(X)$ في الحقل E معادة بقدر رتب تضاعفها.

ذكر بدون برهان النظرية التالية: مهما يكن K حقلا تبديليا، يوجد حقل تبديلي مغلق جبريا L يحتوي K كحقل جزئي منه.برهان نظرية D'ALEMBERT-GAUSS [حقل الأعداد العقدية مغلق جبريا].

5.1. التوسيعات [يمكن تناول هذا الفصل من هذا البرنامج باعتبار فقط حقول الأعداد وتوسيعاتها الجبرية وتوسيعاتها لـ GALOIS في حقل الأعداد العقدية C]

تعريف الحقل الجزئي - مفهوم التوسيع - درجة التوسيع - قانون جداء الدرجات - تعريف العنصر الجبري مع تقديم أمثلة عن عناصر جبرية في R على الحقل Q وأخرى متسامية أي ليست جبرية - كثير الحدود الأصغري لعنصر جبري وخواصه - درجة العنصر الجبري - مرافقات عنصر جبري - التوسيع الجبري - التوسيع المنتهي - العلاقة بين التوسيع الجبري والتوسيع المنتهي - التوسيع الجبري البسيط الناتج من إضافة عنصر جبري واحد إلى حقل وتعيين أساسه القانوني - التوسيع الجبري الناتج من إضافة $n \geq 2$ عنصر

جبري إلى حقل - العنصر الجبري الفصول - التوسيع الجبري الفصول - نظرية العنصر المولّد وبرهانها - الإشارة، مع البرهان، إلى أنّ كل توسيع منته لحقل مميّزته صفر هو توسيع جبري بسيط [وهي نتيجة لنظرية العنصر المولّد] - تعريف الغلق الجبري لحقل [يرمز للغلق الجبري لحقل تبديلي K بالرمز $\overline{K}$] البرهان أنّ $\overline{K}$ توسيع جبري لـ K وهو مغلق جبريا.

6.1. تماثلات الحقول

تعريف تماثل الحقول ودراسة كلّ خواصه مع أمثلة - تمديد تماثل حقول - برهان (باستعمال بديهية ZORN) النظرية التالية: ليكن K حقلا تبديليا و L حقل مغلق جبريا يحتوي K و E توسيع جبري لـ K
و $\varphi \in Hom(K,L)$. نرمز لمجموعة التماثلات من E إلى L والتي تمدّد φ بـ$Hom_\varphi(E,L)$ ، لدينا:
أ- $1 \leq card(Hom_\varphi(E,L))$
ب- إذا كان L جبري على $\varphi(K)$ و E مغلق جبريا فإنّ كل عنصر من $Hom_\varphi(E,L)$ هو تشاكل من E إلى
جـ- الغلق الجبري لـ 7.1. حقل جذور كثير حدود، التوسيع الاعتيادي وتوسيع GALOIS
7.1. حقل جذور كثير حدود، التوسيع الاعتيادي وتوسيع GALOIS
K وحيد بتشاكل.
7.1. حقل جذور كثير حدود، التوسيع الاعتيادي وتوسيع GALOIS
حقل جذور كثير حدود - التوسيع الاعتيادي -تعريف توسيع GALOIS مع أمثلة توضيحية - زمرة GALOIS - مرافقة GALOIS - أمثلة.

8.1. حقل جذور كثير حدود من الدرجة 3 بمعاملات في حقل أعداد :
تعريف محدّد كثير حدود - حساب محدّد كثير حدود من الدرجة الثالثة - تعيين حقل جذور كثير حدود من الدرجة 3 بمعاملات في Q و R وزمرة GALOIS لهذا الحقل - أمثلة

9.1. المعادلات الجبرية من الدرجة أكبر من أو تساوي 5 :
ذكر بدون برهان نظرية GALOIS التي تنص على أنّ: أي معادلة جبرية $f(x)=0$ من الدّرجة أكبر من أو تساوي 5 قابلة للحل بالتجذير إذا وفقط إذا كانت زمرة GALOIS لحقل جذور كثير الحدود f في C ، تحليلية - أمثلة عن معادلات جبرية من الدرجة 5 غير قابلة للحل بالتجذير.

10.1. التوسيعات المنتهية للحقول المنتهية :
دراسة التوسيعات المنتهية للحقول المنتهية $\mathsf{F}_p = \dfrac{\mathsf{Z}}{p\mathsf{Z}}$ حيث p عدد أوّلي.

2. المقاييس:
تعريف المقياس على حلقة واحدية وتبديلية مع أمثلة - المقياس الجزئي - اتحاد، تقاطع ومجموع عائلة كيفية من المقاييس الجزئية - المجموع المباشر لعائلة كيفية من المقاييس الجزئية - تماثل المقاييس وخواصه - الجداء والجداء المباشر لعائلة كيفية من المقاييس - المقياس الحر - تساوي القدرة بين أسس مقياس حر –

رتبة مقياس حر [نرمز لرتبة A -مقياس حر M بـ $rang_A(M)$ ونصطلح على أنّ $rang_A(\{0_M\})=0$ -
برهان القضية التالية: إذا كان M A -مقياس حر رتبته $n \geq 1$ ، فإنّ كل مقياس جزئي حر من M رتبته أقل من أو تساوي n.

أهم المراجع

1. CLAUDE MUTAFIAN, le Défi Algébrique, Tome 2 , Librairie Vuibert, 63 bd Saint-Germain, 75005 Paris.
2. J. QUERRE, Cours d'Algèbre, Masson, 1976.
3. ALLAN CLARK, Elements of Abstract Algebra.
4. SERGE LANG, Algebra, Third Edition.
5. Les cours de SERGE LANG, Structures Algébriques, Inter Edition, Paris.
6. QUEYSANNE; Premier Cycle et Préparation aux Grandes Ecoles, Armand Colin, Cllection U.
7. N. BOURBAKI, Eléments de Mathématiques, Algèbre, Chapitres de 1 à 3, Hermann.
8. N. BOURBAKI, Eléments de Mathématiques, Théorie de Ensembles, Hermann.
9. JOSETTE CALAIS, Eléments de Théorie des Groupes, Puf Mathématiques.
10. ALAIN BOUVIER, Groupes: Observation,Théorie,Pratique, Actualités Scientifiques et Industrielles 1383, HERMANN.